Ответы и решения задач «желтого» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Копия скульптуры в треть роста весит 74 кг. Сколько кг весит скульптура из того же материала в полный рост?

Ответ: 1998.

Решение: 74 · 27 = 1998.

Задача 2. (7 баллов) Если число B увеличить на 20 %, то результат будет составлять 40% числа A. Во сколько раз число A больше числа B?

Ответ: 3.

Решение: A/B = 100/40 · 1,2 = 3.

Задача 3. (8 баллов) На День Рождения Алёши мама испекла 4 торта, истратив на них в сумме 17 коржей. Между каждыми двумя коржами был намазан клубничный или малиновый джем. В каждом торте джем чередовался. Сколько могло быть слоёв малинового джема?

Ответ: 5, 6, 7 или 8.

Решение: Всего намазано 13 промежутков. В каждом торте разница 0 или 1. Общая разница не более 4. Значит, возможны 5 и 8, 6 и 7, 7 и 6, 8 и 5.

Задача 4. (8 баллов) Вася взял длинную полоску бумаги и согнул ее гармошкой в 15 одинаковых слоев. Затем развернул ее и сложил теперь гармошку из 20 одинаковых слоёв. Сколько линий сгиба образовалось на полоске?

Ответ: 29.

Решение: Если сначала сгибали в a слоёв, а затем в b слоёв, то первый раз будет $a-1$ сгибов, второй раз – $b-1$ сгибов. При этом совпадающие сгибы будут делить полоску на $\text{НОД}(a;b)$ частей, то есть таких сгибов будет $\text{НОД}(a;b)-1$. Значит, всего будет $(a-1)+(b-1)-(\text{НОД}(a;b)-1)$ сгибов. В данном случае получаем 14 + 19 – 4 = 29.

Задача 5. (10 баллов) Маша печёт фигурное печенье сложной формы. У неё есть одинаковые квадратные листы теста, из одного листа можно вырезать одно печенье. Из теста, оставшегося после вырезаний трёх печений, можно раскатать ещё такой же квадратный лист теста. Какое наименьшее количество листов теста нужно взять, чтобы получить 52 печенья?

Ответ: 35.

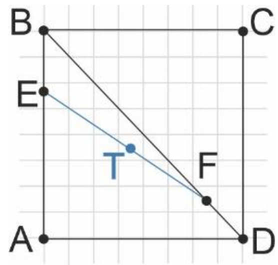
Решение: Обозначая через П, Л и О печение, листы и остатки от 1 листа, можно изобразить решение так: 35Л → 35П + 11Л + 2О → 46П + 4Л + 1О → 50П + 1Л + 2О → 52П + 1О. Остаётся теста меньше, чем на 1 печенье, поэтому меньшим количеством листов не обойтись.

Задача 6. (10 баллов) Выписано 47 подряд идущих натуральных чисел, среди которых можно выбрать три числа, одно из которых равно сумме двух других. Какое наибольшее число могло быть выписано?

Ответ: 91.

Решение: Пусть x — меньшее из выписанных чисел. Тогда из условия получаем $x+(x+1)\leq x+46, x\leq 45, x+46\leq 91$, подходят числа от 45 до 91.

Задача 7. (12 баллов) Дан квадрат, точка E на стороне AB, точка F на диагонали BD; $3AE = BE$, $3BF = 5DF$; точка T — середина отрезка EF. Найдите отношение длин отрезка AT и диагонали квадрата.



Ответ: 5 : 16.

Решение: Если представить квадрат как клетчатую фигуру 8×8, то видно, как точка T попадает в центр клетки. Отсюда следует, что T лежит на AC, а также искомое отношение.

Задача 8. (12 баллов) Сколько двузначных натуральных чисел, про каждое из которых верно утверждение «если первая цифра числа меньше 6, то вторая цифра больше 5»?

Ответ: 60

Решение: Подходят все числа, где первая цифра от 6 до 9, и все числа, где первая цифра от 1 до 5, а вторая от 6 до 9. Итого $4 \cdot 10 + 5 \cdot 4 = 60$.

Задача 9. (14 баллов) Натуральные числа a и b таковы, что НОК (a, b) – НОД $(a, b) = ab/29$. Найдите $a + b$.

Ответ: 840.

Решение: Пусть p — простое. Если $a = x\text{НОД}(a; b)$, $b = y\text{НОД}(a; b)$, то $\text{НОК}(a; b) = xy\text{НОД}(a; b)$. Подставляя и упрощая НОК (a, b) – НОД $(a, b) = ab/p$, получаем $pxy - p = xy\text{НОД}(a; b)$ или $xy(p - \text{НОД}) = p$. Так как p — простое, $p - \text{НОД} < p$, то $\text{НОД} = p - 1$, а числа x и y — это 1 и p. Значит, числа a и b — это $p - 1$ и $p(p - 1)$.

В данном случае $p = 29$, искомые числа 28 и $28 \cdot 29$.

Задача 10. (14 баллов) В каждой клетке таблицы 7×7 записано натуральное число. В любом куске таблицы размером 1×3 или 3×1 сумма чисел равна 9. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел таблицы?

Ответ: 151.

Решение: Наибольшее число в клетке — 7. Доску несложно разбить на 16 частей и 1 клетку, сумма не более $16 \cdot 9 + 7 = 151$. Такая сумма возможна, пример показан на рисунке.